Nachhilfestunde Ex3

$f(x) = e^{-x/2} - 2$

Zur Untersuchung einer Exponential-Funktion mit Zusatzaufgaben

Niveau: Grundkurs Gymnasium oder Fachoberschule

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 45053

Stand 16. April 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 14 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Funktion

$f(x) = e^{-x/2} - 2$. Wir besprechen ausführlich grundlegende Methoden.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Und das sind die besprochenen Themen bzw. Methoden:

$\boxed{1}$ Wertetafel und Zeichnung von $f(x) = e^{-x/2} - 2$ erstellen.

$\boxed{2}$ Nullstellen berechnen mit „ln“. Drei Log-Regeln.

$\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ Exponentialgleichungen lösen.

$\boxed{5}$ und $\boxed{6}$ $f'(x) = a \cdot e^{ax+b}$ ableiten.

$\boxed{7}$ Extrempunkte berechnen.

$\boxed{8}$ Wendepunkte berechnen.

$\boxed{9}$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$ und waagerechte Asymptote y = -2.

$\boxed{10}$ Dreiecksinhalt bestimmen.

$\boxed{11}$ Produktregel für Ableitungen.

$\boxed{12}$ Extremen Dreieckinhalt berechnen.

$\boxed{13}$ Randwerte der Flächeninhaltsfunktion bestimmen. Regel von de L’Hospital anwenden.

$\boxed{14}$ Regel von de L’Hospital erklären.

$\boxed{1}$ Unsere Funktion hat die Gleichung $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 2$.

Wir wollen zuerst nachdenken, wie man das Schaubild K von f zeichnen kann.
Man kann manche e-Funktionen gut zeichnen, wenn man folgende Werte kennt:

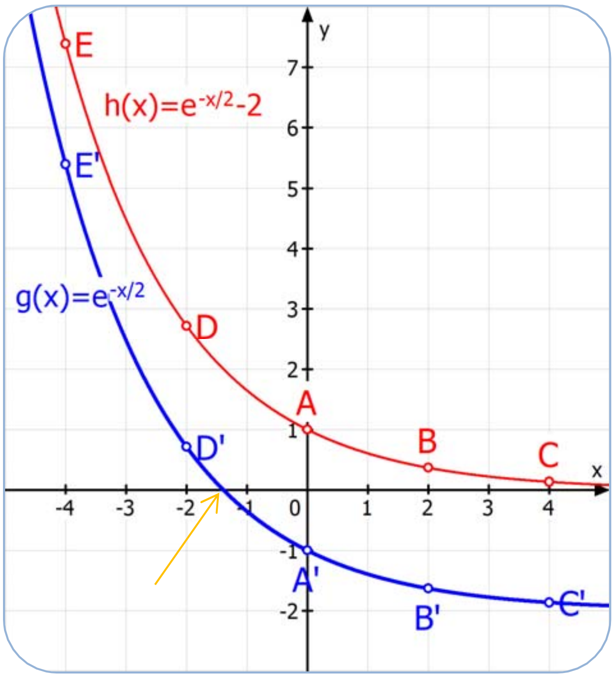
$$e^0 = 1,\quad e^1 \approx 2{,}718,\quad e^2 \approx 7{,}4,\quad e^{-1} \approx 0{,}4 \quad \text{und} \quad e^{-2} \approx 0{,}1$$

Ich zeige dir zuerst, wie man damit die Teilfunktion $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ in den Griff bekommt.

Weil im Exponenten „Halbe" stehen, sollte man für x nur Zweierzahlen verwenden:

$g(0) = e^{-\frac{1}{2}\boxed{0}} = 1$	Daher	$f(0) = 1 - \boxed{2} = -1$
$g(2) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\boxed{2}} = e^{-1} \approx 0{,}4$		$f(2) \approx 0{,}4 - \boxed{2} = -1{,}6$
$g(4) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\boxed{4}} = e^{-2} \approx 0{,}1$		$f(4) \approx 0{,}1 - \boxed{2} = -1{,}9$
$g(-2) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\boxed{-2}} = e^{1} \approx 2{,}72$		$f(-2) \approx 2{,}72 - \boxed{2} = -0{,}72$
$g(-4) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\boxed{-4}} = e^{2} \approx 7{,}4$		$f(-4) \approx 7{,}4 - \boxed{2} = 5{,}4$

Ich habe die Teilfunktion g gezeichnet und dann f mit -2 (Verschiebung um2 nach unten).



Das war ein Beispiel für eine Funktion, die man ohne Taschenrechner zeichnen kann bzw. soll.

Bestimme du jetzt, in welchem Punkt K die x-Achse schneidet. $\Rightarrow$ $\boxed{2}$

$\boxed{2}$ Schnittpunkte mit der x-Achse haben stets die y-Koordinate 0. Daher heißt man diese Stellen meisten auch Nullstellen.

Die Bedingung für Nullstellen lautet: $f(x) = 0$.

Das heißt hier: $e^{-\frac{1}{2}x} - 2 = 0$ bzw. $e^{-\frac{1}{2}x} = 2$

GW **Wie löst man Exponentialgleichungen?**

Die Lösung der Gleichung $e^x = 5$ schreibt man so auf: $x = \ln(5)$

Die Lösung der Gleichung $e^x = 2$ schreibt man so auf: $x = \ln(2)$

Man kann das auch anwenden auf: $e^0 = 1 \Rightarrow \mathbf{0 = \ln(1)}$

oder: $e^1 = e \Rightarrow \mathbf{1 = \ln(e)}$

Usw.

Die Hochzahl bzw. der Exponent ist dann der <u>**n**atürliche **L**ogarithmus</u> vom Ergebnis.

Dies ist nun noch keine Rechnung. Diese überlassen wir dem Taschenrechner, der dazu eine Software einprogrammiert hat

```
ln (5)
        1.6094
ln (2)
       0.69314
```

Unsere Gleichung heißt $e^{-\frac{1}{2}x} = 2$.

Wenden wir dieselbe Methode an, dann schreiben wir: $-\frac{1}{2}x = \ln(2)$

Umstellen nach x ergibt: $x = -2 \cdot \ln(2)$

```
-2×ln 2
        -1.386
```

GW An dieser Stelle mussen ich noch darauf hinweisen, dass es drei Rechenregeln für Logarithmen gibt. Ich schreibe sie hier mal auf:

(Log – 1):	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	z. B.	$\ln(2e) = \ln(2) \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln(2)$
(Log – 2):	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	z. B.	$\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4)$
(Log – 3):	$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$	z.B.	$\ln(e^{-2}) = -2 \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = -2$

Löse jetzt bitte diese Exponentialgleichungen:

a) $2e^x = 1$ b) $e^{2x} = 9$ c) $e^{-x+1} = 2$ d) $e^{2-3x} = 1$

Meine Lösungen stehen in $\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{3}$ Lösung der Gleichungen:

a) $2e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Man kann dann noch die Regel (Log-2) anwenden:

$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2) = -\ln(2)$ Mit TR: $x \approx -0{,}69$

b) $e^{2x} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln(9) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot \ln(9)$

Man kann dann noch die Regel (Log-3) anwenden:

Wegen $9 = 3^2$ ist $\ln(9) = \ln\left(3^2\right) = 2 \cdot \ln(3)$.

Das hat zur Folge: $x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln(3) = \ln(3)$. Mit TR: $x \approx 1{,}10$

c) $e^{-x+1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x-1 = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad -x = 1 + \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 - \ln(2) \approx -1{,}69$

d) $e^{2-3x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3x = \ln(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$

$\boxed{4}$ Zurück zu unserer Funktion: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 2$

Wir haben die Nullstelle berechnet; $e^{-\frac{1}{2}x} - 2 = 0$

Kannst du sie jetzt lösen? $e^{-\frac{1}{2}x} = 2$

$-\frac{1}{2}x = \ln(2) \quad | \cdot (-2)$

$x = -2 \cdot \ln(2)$

Man kann jetzt dann noch die 3. Logarithmusregel anwenden: $2 \cdot \ln(2) = \ln\left(2^2\right) = \ln(4)$

Dann heißt die Nullstelle: $x_N = -\ln(4)$.

Das ist der exakte Wert. Der TR liefert dann noch den Näherungswert. $x_N \approx -1{,}39$.

Kannst du 2 Ableitungen von f berechnen?

$\Rightarrow \boxed{5}$

5

Exponentialfunktionen ableiten.

GW

Die Funktion $f(x) = e^x$ hat die tolle Ableitung: $f'(x) = e^x$.

Die Funktion $f(x) = e^{ax+b}$ hat die Ableitung: $f'(x) = a \cdot e^{ax+b}$.

Regel: Der Term e^{ax+b} bleibt stehen und wird dann noch mit der Ableitung des Exponenten, also mit a multipliziert.
Das nennt man dann die innere Ableitung.

Drei Beispiele: $f(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -e^{-x}$

$f(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

Hier bleibt 4 als konstanter Faktor stehen, mal innere Ableitung $\frac{1}{2}$.

$f(x) = 3 - e^{4-2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -e^{4-2x} \cdot (-2) = 2 \cdot e^{4-2x}$

Der Summand 3 verschwindet beim Ableiten und (-2) ist die innere Ableitung, die als Faktor dazukommt.

Du solltest zwei Ableitungen von $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ berechnen:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Erklärung: $-\frac{1}{2}$ bleibt als konstanter Faktor erhalten.

Und bei der Ableitung von $e^{-\frac{1}{2}x}$ kommt die innere Ableitung $-\frac{1}{2}$ dazu.

Noch eine Übung für dich:

Leite zweimal ab: a) $f(x) = e^{-x+1}$ b) $f(x) = e^{x+3,4}$ c) $f(x) = \frac{1}{2} e^{3-2x}$

→ 6

$\boxed{6}$ Berechnung der Ableitungen:

a) $f(x) = e^{-x+1}$ $\quad f'(x) = e^{-x+1} \cdot (-1) = -e^{-x+1}$

$f''(x) = -e^{-x+1} \cdot (-1) = e^{-x+1} = f(x)$

b) $f(x) = e^{x+3,4}$ $\quad f'(x) = e^{x+3,4} = f(x)$

$f''(x) = e^{x+3,4} = f(x)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{3-2x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}e^{3-2x} \cdot (-2) = -e^{3-2x}$

$f''(x) = -e^{3-2x} \cdot (-2) = 2e^{3-2x}$

$\boxed{7}$ Nach diesen Vorarbeiten untersuchen wir die gegebene Funkton $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ weiter.

Dazu berechnen wir zwei Ableitungen: $\quad f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Zuerst bestimmen wir die Extrempunkte, also Punkte mit waagrechter Tangente.

Die Notwendige Bedingung dazu lautet: $\quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

Diese Gleichung hat aber keine Lösung, also gibt es keine Extrempunkte.

Wir können aber eine andere Aussage treffen:

Da $e^{-\frac{1}{2}x}$ nur positive Werte liefert, ist $f'(x)$ stets negativ.

Folgerung: Das Schaubild K von f fällt im ganzen Definitionsbereich.

Eine Aufgabe für dich: Bestimme die Wendepunkte von K.

$\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{8}$ Für Wendepunkte braucht man die zweite und eventuell die dritte Ableitung:

$$f''(x) = -\tfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$f'''(x) = \tfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{16}e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Die <u>Notwendige Bedingung für Wendepunkte</u> lautet: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

Diese Gleichung hat aber keine Lösung, also gibt es keine Wendepunkte.

Wir können aber eine andere Aussage treffen:

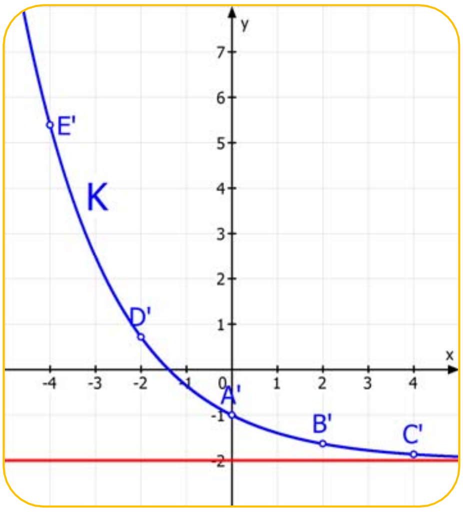
Da $e^{-\frac{1}{2}x}$ nur positive Werte liefert, ist $f''(x)$ stets positiv.

Eine positive Ableitung deutet stets auf eine Zunahme der Werte hin.

Hier: Wegen $f''(x) > 0$ folgt $f'(x)$ nimmt für wachsendes x zu.

Und das heißt:

K hat überall Linkskrümmung.



Beantworte bitte:

Wie verhält sich f bzw. K für $x \to \infty$?

Kannst du das Ergebnis auch mit einer Formel begründen?

$\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{9}$ Anschaulich kann man sagen:

Die Kurve K nähert sich für $x \to \infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = -2$ an.

Das war eine **geometrische Aussage.**

Es gibt dazu aber auch eine **algebraische Aussage:** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$

Der Beweis dazu geht so:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}x} - 2\right) = \left[\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\right] - 2 = 0 - 2 = 0$$

Dahinter steckt das

$\boxed{\text{GW}}$ Man kann den Term von $y = e^{-\frac{1}{2}x}$ so umschreiben:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} = \left(e^{-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{-x}}$$

Und wenn man weiß, dass $e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$, dann ist „klar", dass die

Quadratwurzel daraus ein gleichartiges Verhalten zeigt: $e^{-\frac{1}{2}x} \to 0$ für $x \to \infty$.

Das wird strengen Mathematikern zu unmathematisch formuliert sein.

Doch in einer Nachhilfestunde soll man auch so anschaulich wie möglich vorgehen, wenn es darum geht, zu zeigen, „was passiert".

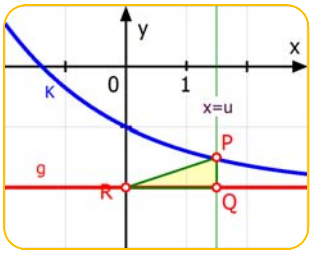
Damit ist gezeigt, dass f für $x \to \infty$ den Grenzwert -2 hat, und zugleich, dass sich der Graph K von f nach rechts der Asympoten $y = -2$ annähert.

Nun eine Zusatzaufgabe

$\Rightarrow$ $\boxed{10}$

10 Zusatzaufgabe

Die Gerade x = u mit u > 0 schneidet das Schaubild K in P und die Gerade g mit der Gleichung y = - 2 in Q.
Ferner sei R (0 I -2).
Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Für welchen Wert nimmt es einen extremen Inhalt an?
Untersuche Art und Größe dieses Extremwerts.



Die Vorarbeit besteht darin, den Punkten Koordinaten zuzuweisen:

P liegt auf K: $P\left(u \mid f(u)\right) = \left(u \mid e^{-\frac{1}{2}u} - 2\right)$

Q liegt auf g: $Q\left(u \mid -2\right)$

R ist gegeben: $R\left(0 \mid -2\right)$

Daraus folgt für die Grundseite QR: $\overline{QR} = u$

und für die Höhe PQ: $\overline{PQ} = y_P - y_Q = \left(e^{-\frac{1}{2}u} - 2\right) - (-2) = e^{-\frac{1}{2}u}$

Inhalt des Dreiecks: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot \overline{PQ} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}}$

Das war der erste Schritt. Damit dieser Inhalt maximal wird, brauchen wir das passende u.
Du weißt sicher, was das für dich bedeutet:

Du musst für die Flächeninhaltsfunktion A(u) den Extremwert berechnen.

Dazu benötigst du zwei Ableitungen.

Und weil nun u in einem Produkt mit $e^{-\frac{1}{2}u}$ steht, benötigst du dazu die Produktregel.

Das besprechen wir im Abschnitt $\Rightarrow$ 11

11 Arbeiten mit der Produktregel.

GW Die Produktregel lautet: $(r \cdot s)' = r' \cdot s + r \cdot s'$

Üblicherweise verwendet man für die Faktoren hier u und v.
Doch weil u in unsrer Flächeninhaltsfunktion schon vergeben ist. nenne ich die beiden Faktoren r und s.

Und unsere Funktion: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$

Der Funktionsterm ist also das Produkt $A(u) = r \cdot s$

mit $r(u) = \frac{1}{2}u$ und $s(u) = e^{-\frac{1}{2}u}$.

Ihre Ableitungen sind: $r'(u) = \frac{1}{2}$ und $s'(u) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$

Man kann das auch gleich in die Produktregel einsetzen. Dann sieht die Ableitung so aus:

$$A(u) = \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot u}_{r} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}u}}_{s} \quad \Rightarrow \quad A'(u) = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}u} + \tfrac{1}{2}u \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\right)$$

Man kann jetzt zusammenfassen, indem man den e-Term ausklammert:

$$A'(u) = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}u} - \tfrac{1}{4}u \cdot e^{-\frac{1}{2}u} = \boxed{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}u\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}u}}$$

Das ist nicht einfach. Man darf nur den Faden nicht verlieren und die Produktregel konsequent durchrechnen.

Es ist nun eine Super-Übung, daraus die 2. Ableitung zu berechnen. Bitte!

⇒ 12

$\boxed{12}$ Gegeben ist die Flächeninhaltsfunktion $A(u) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot u}_{r}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{2}u}}_{s}$

Wir haben soeben berechnet: $A'(u) = \tfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}u} - \tfrac{1}{4}u\cdot e^{-\frac{1}{2}u} = \boxed{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}u\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}u}}$

Daraus folgt wiederum mit der Produktregel:

$$A''(u) = -\tfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}u} + \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}u\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}u}$$

Zusammenfassen: $A''(u) = -\tfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}u} - \left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}u\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}u}$

Und ausklammern: $A''(u) = \left[-\tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}u\right)\right]e^{-\frac{1}{2}u}$

Zusammenfassen: $A''(u) = \left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}u\right]e^{-\frac{1}{2}u}$

Nun können wir nach dem Extremwert suchen:

Notwendige Bedingung: $A'(u) = 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}u\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}u} = 0$

Da $e^{-\frac{1}{2}u} \neq 0$ folgt $\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}u\right) = 0$ und $\tfrac{1}{4}u = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{u_E = 2}$

Ob nun ein Minimum oder Maximum vorliegt, entscheidet die

Hinreichende Bedingung: $A''(2) = \left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\cdot\boxed{2}\right]e^{-\frac{1}{2}\cdot\boxed{2}} = -\tfrac{1}{4}\cdot e^{-1} < 0$

Maximalwert: $A(2) = \tfrac{1}{2}\cdot\boxed{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\boxed{2}} = 1\cdot e^{-1} = e^{-1} \approx 0{,}4$

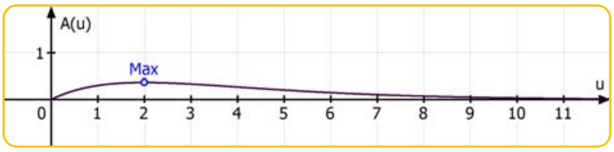
Wir wissen nun, dass der Dreiecksinhalt für u = 2 ein relatives Maximum aufweist.

Doch um zu klären, ob das sogar ein absolutes in $\mathbb{D}_u = \left]0;\infty\right[$ *ist, muss man die Randwerte untersuchen.*

Das tun wir im Abschnitt $\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{13}$ Ich mache jetzt etwas, was man zur Lösung der Aufgabe nicht tut:

Ich zeige den Verlauf der Flächeninhaltsfunktion $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$ für $u > 0$



Man erkennt (was wir schon wissen), dass der Dreiecksinhalt für u = 2 den maximalen Wert 0,4 FE annimmt. Wir sehen aber auch, dass der Inhalt gegen Null geht, wenn u gegen 0 oder gegen Unendlich geht.

Für $u \to 0$ gehen Grundseite und Höhe des Dreiecks gegen Null.

Für $u \to \infty$ wird die Grundseite unendlich lang, und die Höhe geht auf Null zurück.

Das Produkt wird trotzdem Null !! Diese beiden Ergebnisse muss man bei der Lösung der Extremwertaufgabe unbedingt aufschreibe, etwa in dieser Form:

Berechnung der Randwerte:

(1) $\lim\limits_{u \to 0} A(u) = \lim\limits_{u \to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^0 = 0$

(2) $\lim\limits_{u \to \infty} A(u) = \lim\limits_{u \to \infty} \left(\frac{1}{2} u \cdot e^{-\frac{1}{2}u} \right) = \underbrace{\lim\limits_{u \to \infty} \frac{\frac{1}{2}u}{e^{\frac{1}{2}u}}}_{(I)} = \underbrace{\lim\limits_{u \to \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}u} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}}_{(II)} = \underbrace{\lim\limits_{u \to \infty} e^{-\frac{1}{2}u}}_{(III)} = 0$

Diese zweite Berechnung basiert auf der **Regel von de L'Hospital**.

Diese wird in der Regel nur im Leistungskurs eingesetzt.

Im Grundkurs argumentiert man anschaulich (und nach Information im Unterricht) so:

Im Produkt $\frac{1}{2} \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$ geht für $u \to \infty$ der Faktor $\frac{1}{2}u$ gegen Unendlich.

und der Faktor $e^{-\frac{1}{2}u}$ gegen Null. **Die Exponentialfunktion setzt sich im Produkt durch,**

so dass das Produkt gegen Null geht. Das Rätsel "$0 \cdot \infty = ?$ führt in so einem Fall zum Ergebnis 0.

Wenn du die Rechnung (2) erklärt haben möchtest, lies noch den Abschnitt $\boxed{14}$ durch.

14 Wie verwendet man die Regel von de L'Hospital?

Man schreibt den Funktionsterm in Bruchform auf:

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot u\cdot e^{-\frac{1}{2}u}\right)=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}u}{e^{\frac{1}{2}u}}\right)=?$$

Dann prüft man, wie sich Zähler und Nenner für $u\to\infty$ verhalten:

Der Zähler $\frac{1}{2}u$ und der Nenner $e^{\frac{1}{2}u}$ gehen für $u\to\infty$ gegen $+\infty$.

Also zeigt der Bruch ein Verhalten der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Dann besagt diese Regel, dass unser Bruch für $u\to\infty$ denselben Grenzwert hat,

wie die neue Funktion, die dadurch entsteht, dass man den Zähler des Bruches und den Nenner jeweils für sich ableitet (also **nicht** die Quotientenregel anwenden!)

In einen Bruch verwandeln

De L'Hospital

Zurück verwandeln

Grenzwert berechnen

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot u\cdot e^{-\frac{1}{2}u}\right)=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}u}{e^{\frac{1}{2}u}}\right)=\lim_{u\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}u}}=\lim_{u\to\infty}e^{-\frac{1}{2}u}=0$$

Das wäre es für heute.

CIAO !